Du Forcing de Cohen aux concepts innovants

Introduction à la théorie de la conception

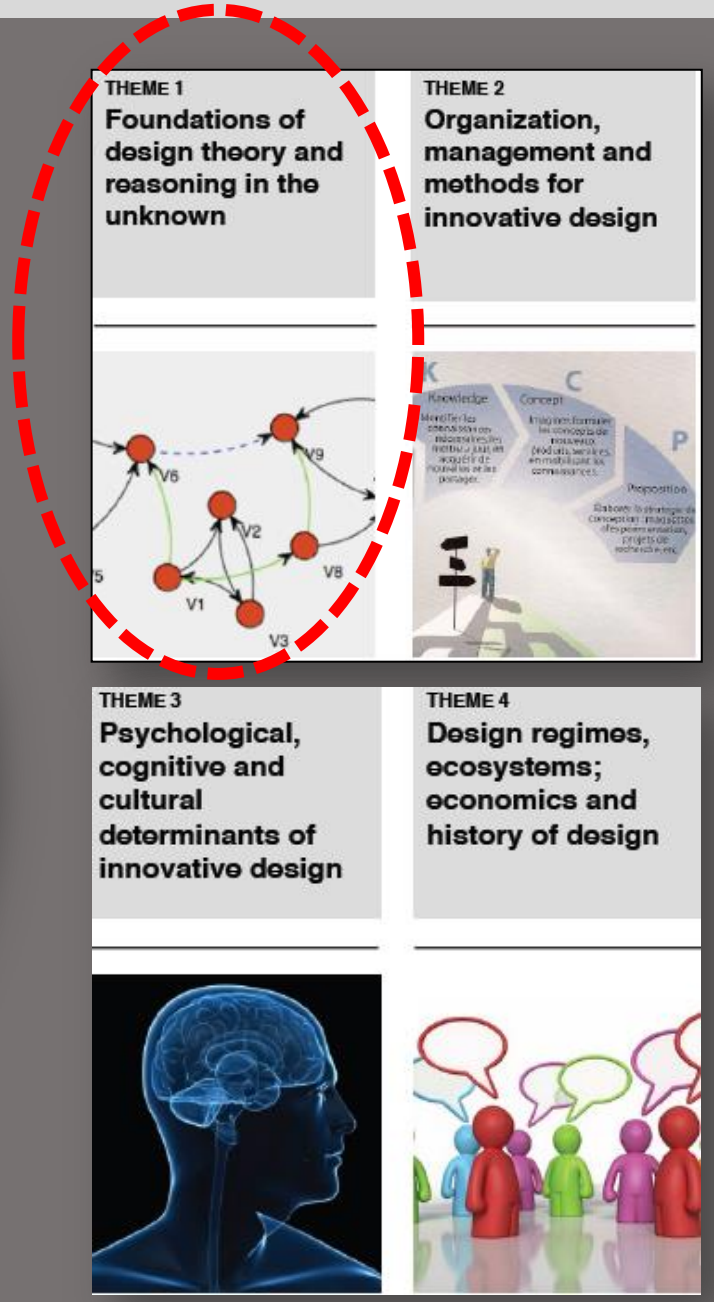
Armand Hatchuel
Chaire TMCI MinesParistech-PSL
UMR I3

Séminaire CEA janvier 2015

1. **Motivations empiriques et théoriques**
2. **Modèle canonique du raisonnement de conception**
3. **Le forcing de Cohen comme théorie de la conception dans ZF ; la « splitting condition».**
4. **La théorie C-K comme modèle général de la conception**
5. **Implications**

La Chaire enseignement et recherche au CGS, créée en 2009

1è cycle : 2009 -2013 : 7 partenaires
2è cycle : 2014-2019 : 11 partenaires



- **Motivation empirique : comment naissent des «objets nouveaux ? »**
  - Processus d'innovation « organisé » dans les entreprises, dans les relations entre recherche et industrie,
  - dans la construction de pédagogies nouvelles,
  - dans l'organisation de la recherche…

- **Motivation théorique : multiples traditions et courants philosophiques, mais absence de cadre formel distinctif et unificateur…**
  - Traditions : Art, Architecte, ingénieur, chercheur…
  - Sciences de l'ingénieur : théorie des machines, de la modélisation, de l'optimisation, de l'intelligence artificielle
  - Sciences dures : Poincaré, Einstein, épistémologies (Lakatof, Horton, Simondon..)
  - Mathématiques : Hadamard (psychologie) ; Forcing de Cohen : ignoré…

- **Etape 1 : Approche canonique : qu'est-ce qu'un raisonnement de conception ? Comparaison avec modélisation et optimisation**

Approche intuitive d'un raisonnement de conception

- un nombre pair entre 1 et 3 : **ensemble des objets possibles connu, choix connu**

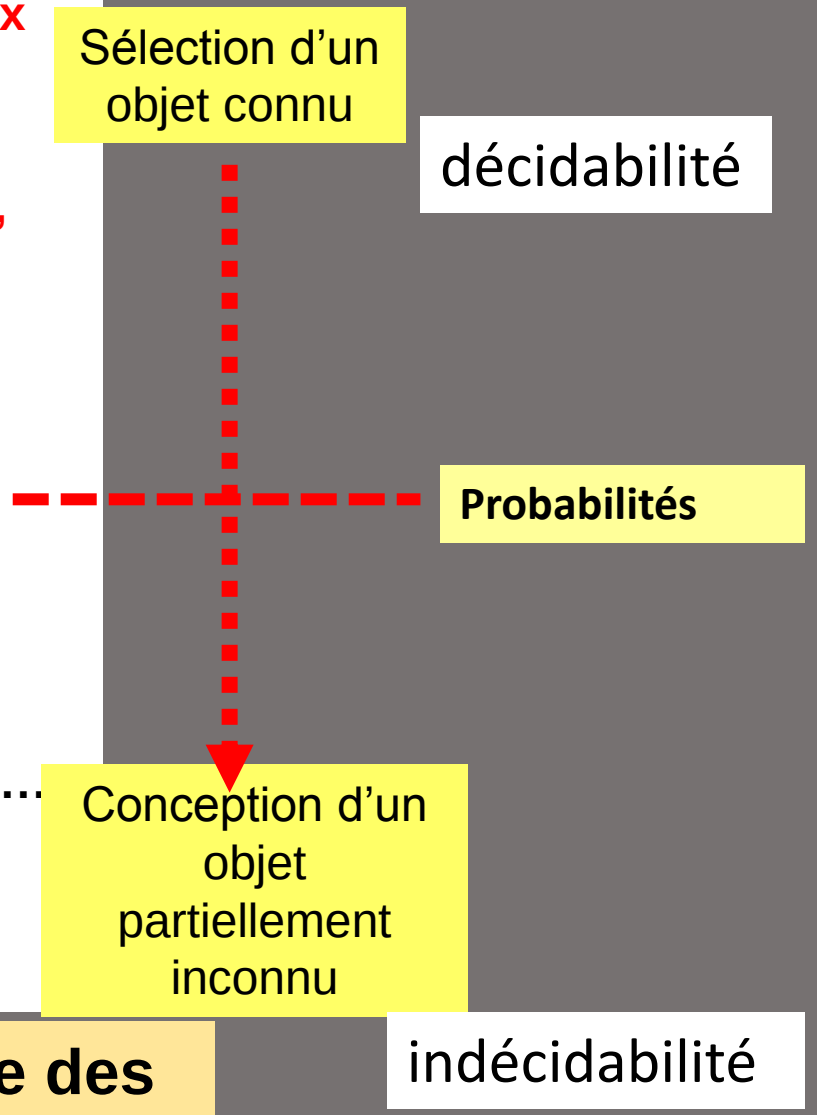
- les solutions d'une équation : **on connaît l'ensemble, éléments inconnus, choix inconnu**

- l'estimation statistique d'un caractère dans un **ensemble connu par échantillonnage…**

- le trajet le plus court dans un pays mal connu : **ensemble des routes inconnu à explorer.**

- un système de freinage automobile ayant une course de 15 m à 100km/h… **ensemble des systèmes de freinages ?**

- une théorie qui explique au mieux un ensemble de faits



Rôle capital de la structure et de la dynamique des connaissances associées ds chaque cas

Modelisation canonique d’un espace de conception : (X, K, D, P)

Notion d' «espace de conception» (design space) : **(X, K, D, P)** (Objets, connaissances, décisions, objectifs)

- **X** un espace d'objets **= collection, ensembles {x},** incluant les relations **R** (règles…) entre ces objets (peuvent être très pauvres : un signe) :
- **K(X)=** {l'ensemble des propositions **connues ou vraies de (X, R)}** (espace des connaissances expansible)
- **D(X) = {di}** un espace de décisions sur **X** et sur **K** ; une « décision » est une proposition de **K(x)** à paramètres libres, donc que nous avons le pouvoir de rendre vraie par action sur ces paramètres
- **P(X)** = {ensemble de pi, propriétés souhaitées pour X}

On appelle «conception de x » ou (conjonction) :

{d1, d2,..dk}, non vide, fini, $\in$ D(X) :

{d1, d2,..dk} → ($\exists$ x $\in$ X tel que $P_1(x)..P_i(x)$ vraies dans K(X))

Les {Pi} = P(X) forment un «**concept de x** » (intention) qui guide la conception par compréhension

Les {Di} sont une «définition constructive » de x , propositions que l'on peut rendre vraie :(extension) qui « Forcent » son existence et P(X) ; elles agissent aussi sur K (production, organisation des connaissances ..) qui a son tour agit sur D.

En toute rigueur : P peut être à la fois en compréhension et en extension (« etre construit avec des briques »)

- **Resultat 2 : Le modèle canonique permet de distinguer des régimes de conception :**

- Soit il existe une solution di, qui est déjà dans K et le problème se ramène à **un pb d'optimisation combinatoire**

- **Soit il faut agir sur K (échantillonnage, analyse spectrale, signal..)** :
  - une optimisation dans l'incertain

- **Soit il faut agir sur K et sur X** conjointement est on est dans un raisonnement de conception innovante donc avec un potentiel maximal d'expansion

Comparaison entre probabilité et conception

- **théorie des probabilités :**

  X, K1(X), (K2(X), Pr), D, P)

- **Objet : X,**
- **Il existe une classe de propriétés : K2(X) tel que P(K'(X)) =/= 1 : la probabilité est un operateur de K**
- **Mais on peut trouver des décisions di : di→ P(K'(X)) > s : qui forcent une transformation des probabilités (Bayes)**
- **Dans ce modèle, les décisions ne créent pas d'objets mais elles forcent certains états de ces objets**
- **Les décisions agissent sur les probas (Bayes) qui à leur tour modifient les décisions.**

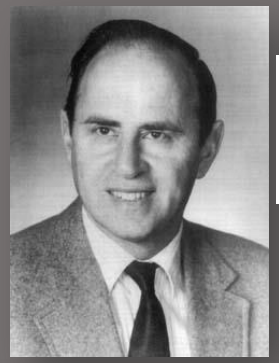
La théorie des probabilités est une forme restreinte de la théorie de la conception :

- Certaines propriétés de l'objet ne sont pas connues ; Réduire l'incertitude exige des décisions qui « fixent » l'objet
- Si on distingue un objet de sa position, la conception ne se voit pas ; Mais si on considère que la position d'un objet fait partie de sa définition alors probas = conception…
- En fait dans le premier cas, le déplacement des objets est **non splitting** pour leur définition..(voir plus loin) : il y a i**ndépendance** entre l'objet et sa position

3. Le Forcing de Paul Cohen : théorie de la conception dans ZF

Une théorie de la conception au cœur des mathématiques modernes :

- **Les « ensembles » sont des objets** dont la connaissance «établie» **K** ={ ZF + la totalité des propositions vraies déduites de ZF}
- **Il y a une autre connaissance possible des ensembles par conception,** construire des ensembles ZF qui présentent des propriétés **nouvelles P** donc « **indépendantes** » de ZF :
- **Le théorème-raisonnement du « forcing» :** généricité, indécidabilité, indépendance,



Paul Cohen médaille Fields 1964

Théorie des ensembles : axiomes de Zermelo-Frankael :« ZF »

1. Axiom of extensionality: Two sets are the same if and only if they have the same elements.
2. Axiom of empty set: There is a set with no elements. We will use {} to denote this empty set.
3. Axiom of pairing: If *x*, *y* are sets, then so is {*x*,*y*}, a set containing *x* and *y* as its only elements.
4. Axiom of union: For any set *x*, there is a set *y* such that the elements of *y* are precisely the f the elements of *x*.
5. Axiom of infinity: There exists a set *x* such that {} is in *x* and whenever *y* is in *x*, so is the union *y* U {*y*}.
6. Axiom of separation (or subset axiom): Given any set and any proposition P(*x*), there is a subset of the original set containing precisely those elements *x* for which P(*x*) holds.
7. Axiom of replacement: Given any set and any mapping, formally defined as a proposition P(*x*,*y*) where P(*x*,*y*) and P(*x*,*z*) implies *y* = *z*, there is a set containing precisely the images of the original set's elements.
8. Axiom of power set: Every set has a power set. That is, for any set *x* there exists a set *y*, such that the elements of *y* are precisely the subsets of *x*.

En 1960, **deux grandes *conjectures* P1 et P2 de la théorie des ensembles**

- P1 : « **L'hypothèse du continu »** : **il n' y a pas d'infini dont le cardinal est entre nombre entiers N et celui des points de la ligne R (ligne continue), ou intermédiaire à la suite des Aleph…**

- P2 : **« axiome du choix »** : **Soit un ensemble X composé de sous ensembles non vides et mutuellement disjoints, il esiste un ensemble Y (une fonction de choix pour x) contenant exactement un élèment et un seul de X**

- **Conjecture ? Voie 1 : ZF →P1 Vrai ou faux ?**

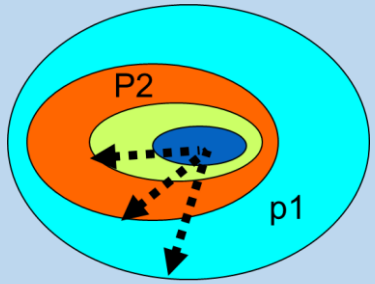
- **Voie 2 : concevoir une nouvelle collection d'ensembles, un « modèle » de ZF où P1 seraient vraies ou fausses selon volonté**

- **Si la voie 2 réussit alors la voie 1 était une impasse P1 est indécidable dans ZF.**

Le forcing de COHEN

Espace de conception

- Construction : suites de contraintes emboitées sur **M** (ordre partiel) = **filtres sur M : p1, p2, p3 ; p**i < pj = pi domine pj = un sous ensemble de **M**



- on peut construire un **filtre générique G** = ensemble de contraintes qui forment un filtre et qui **intersecte tous les sous-ensembles denses de P** = différent de tous les ensembles de P.

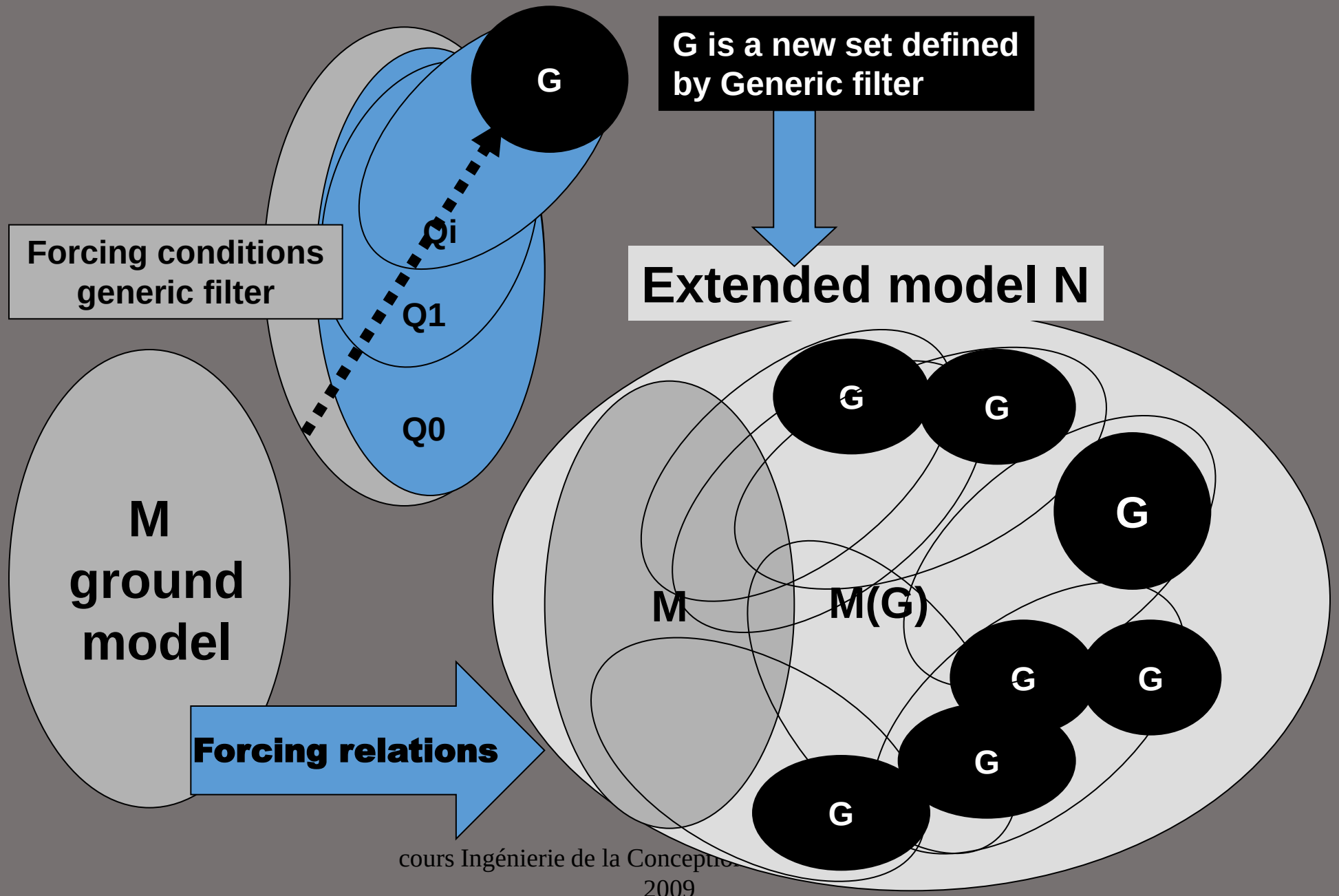
K

- **Le modèle de départ M (les entiers)**
- **Axiomes de ZF**

M = collection d'ensembles x qui respecte ZF

- **théorème : G n'est pas dans M !**
- **Extension générique M(G)= nouveaux ensembles construits avec G : extension N = M + M(G)**
- **Si G est bien choisi P1 est vrai sur N**

Figure 2. The forcing method



Intuitive proof of the generic filter definition : G intersects all dense parties → G IS NOT IN M. (Jech 2000, Dehornoy www,..)

Forcing constraints produce (M, P, >) an infinite series of finite suites on (N→(0,1))

- For all n , we have a dense subset with all contrainsts of lenght > n
- G is different of any of these finite suites
- If he is in M then he belongs to one dense subset and he is dominated :
  - *He is not of finite or he is in M*
  - *He is different of any other infinite suites*
  - *He cannot be dominated or there is a D to which he has no intersection*
  - *Hence, for any dense subset D, he contains a constraint in D, and others in the other dense subsets*
  - **By induction for all D, G intersects all D**

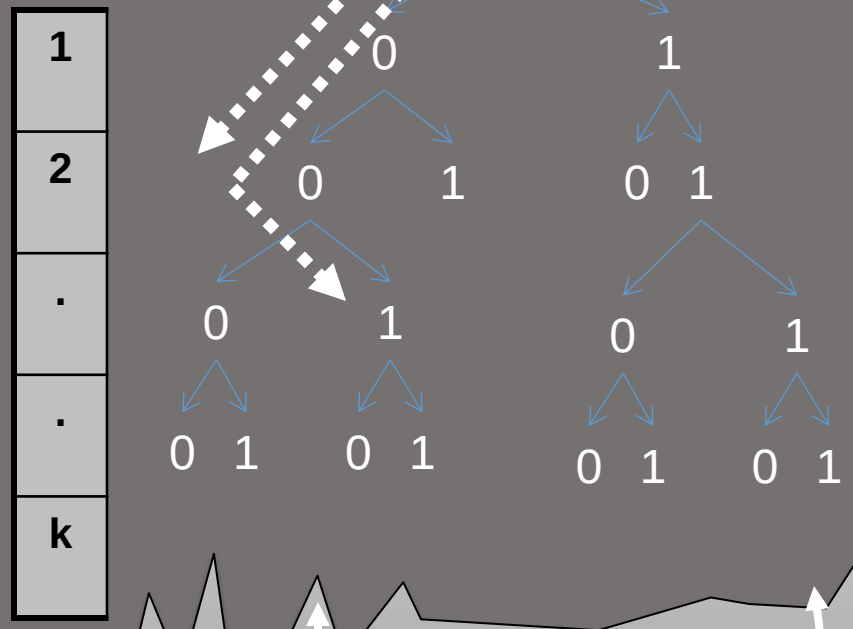
- **Cohen has generalized Cantor's diagona**l but his technique is extremely powerful : cantor generated one number different from a finite number of specified others , cohen can generate as many reals as he wants : all G

- **In the real world : forcing means it is always possible to find a combination that is different from all other combinations : some extra knowledge is needed.**

Example: the generation of « Cohen » reals by Forcing (see also Hatchuel, Weil 2007, 2013)

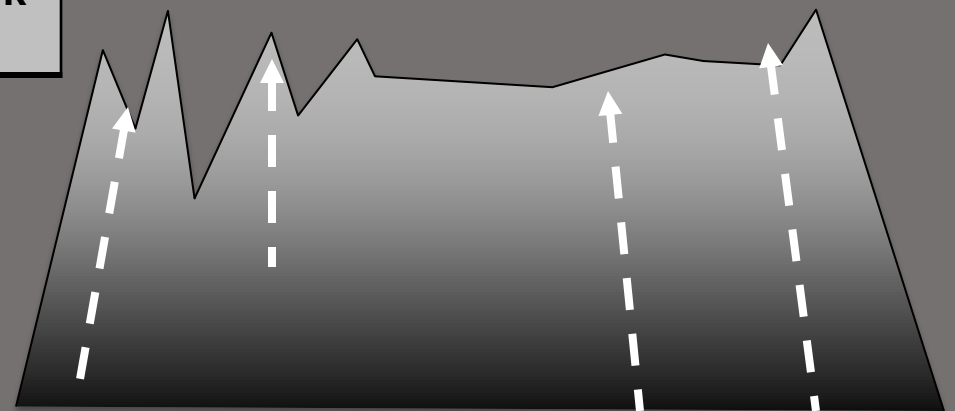
M, model of sets, based on ω (integers)

Forcing conditions
(Filter = step by step refinements of sets of integers)



Generic filter = Cohen real (different from all base-2 reals)

Dense subset = a set of conditions which contain a refinement for every condition
(eg: the set of all conditions longer than k)



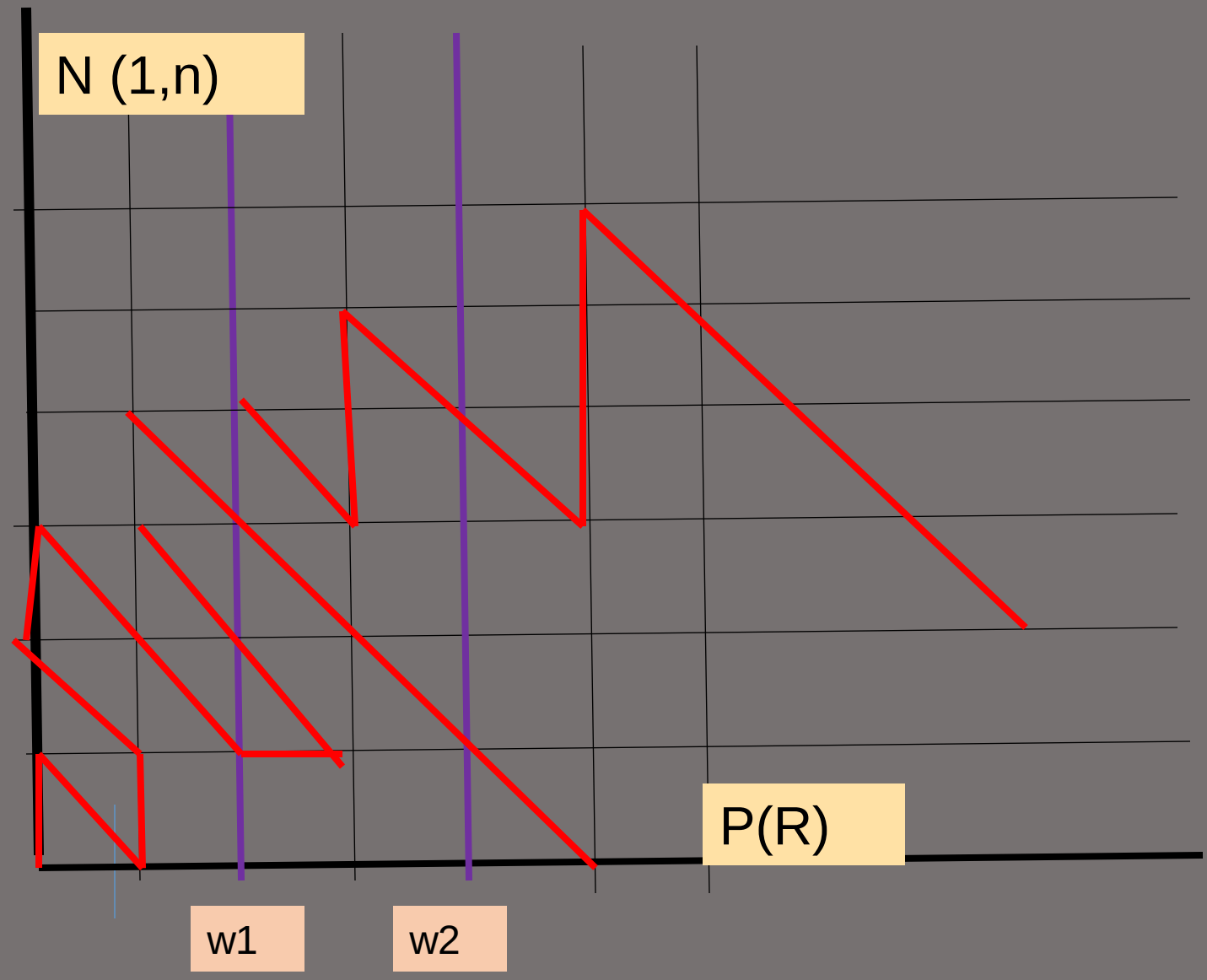
Indépendance de l'hypothèse du continu : esquisse du forcing obtenu par Cohen

- le modèle de base est toujours N (entiers)
- mais on va organiser un forcing à deux dimensions :
- les pi sont des sous ensembles de

NxP(R)→ entiers x parties de R→ (0,1)

- le filtre générique sur N* P (R) passe par tous les points
- pour chaque wi de P (R) correspond un Cohen real différent
- donc il y en a card R + Card P(R) !
- **l'hypothèse du continu est violée donc elle est indépendante de ZF**

Filtre à deux dimensions



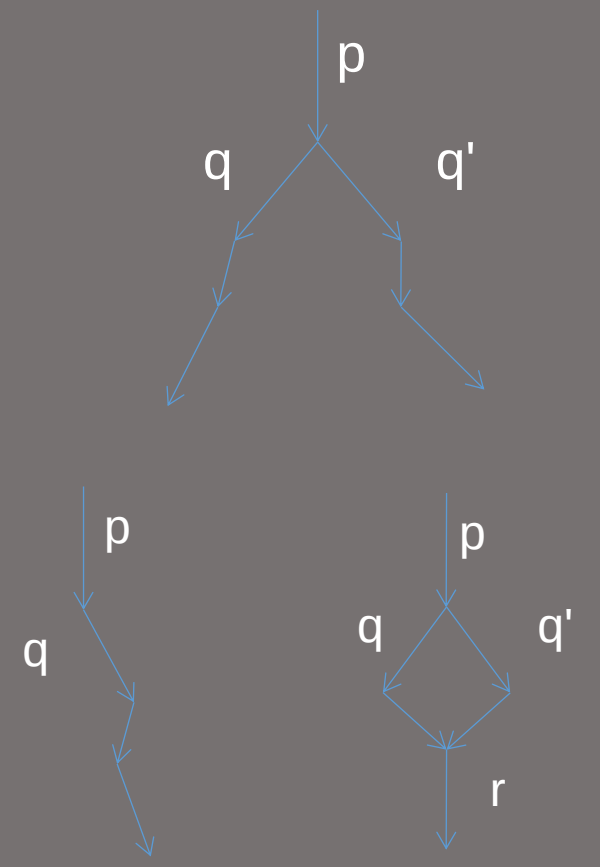
Insights brought by Forcing :

- the ground model M = defines a well formed and known collection of objects = the knowledge background
- Design « forces » by a sequence of refinements (filters)
- Generic filters break the definition of objects and controls the properties of the extension
- Generic filters transform an indecidable property into a « forced » one
- Preservation of meaning : likewise forcing warrants the well formation of N, Design has to carefully build the new objects generated

These insights point out directly towards C-K theory

Splitting condition

- Jech 2002, Dehornoy: "Under the splitting condition, G is NOT in M, ie G provokes an extension of the model into M(G)"
- **Definition: splitting condition:**
  - for every p, there are q, q' such that q<p and q'<p and q, q' incompatible
  - There is no constraint r<p that is "unsensitive" to q vs q' choice



Deterministic rules

Modularity

- **Not SC: there is one p such that:**
  - Either: there is always one unique q
    - if p, then q1, then q2,… = a deterministic chain of conditions
  - Or: if there is q, q', then they are compatible (ie: there is r such that r<q and r<q')
    - = modularization before r
- **If not SC in p, then there is one unique G with p, and G includes all conditions refining p.**

Splitting condition : interprétation

- **Pas de déterminisme : sinon G n'existe pas, donc liens indéterminés**
- **raffinement infini : qui permet de distinguer G de tous les objets connus ; donc la connaissance K connait une expansion irréversible**
- **defixation permanente des définitions des objets : toute contrainte a une alternative incompatible**
- **pas de modularité : permet de ne pas arrêter l'expansion dans chaque voie**

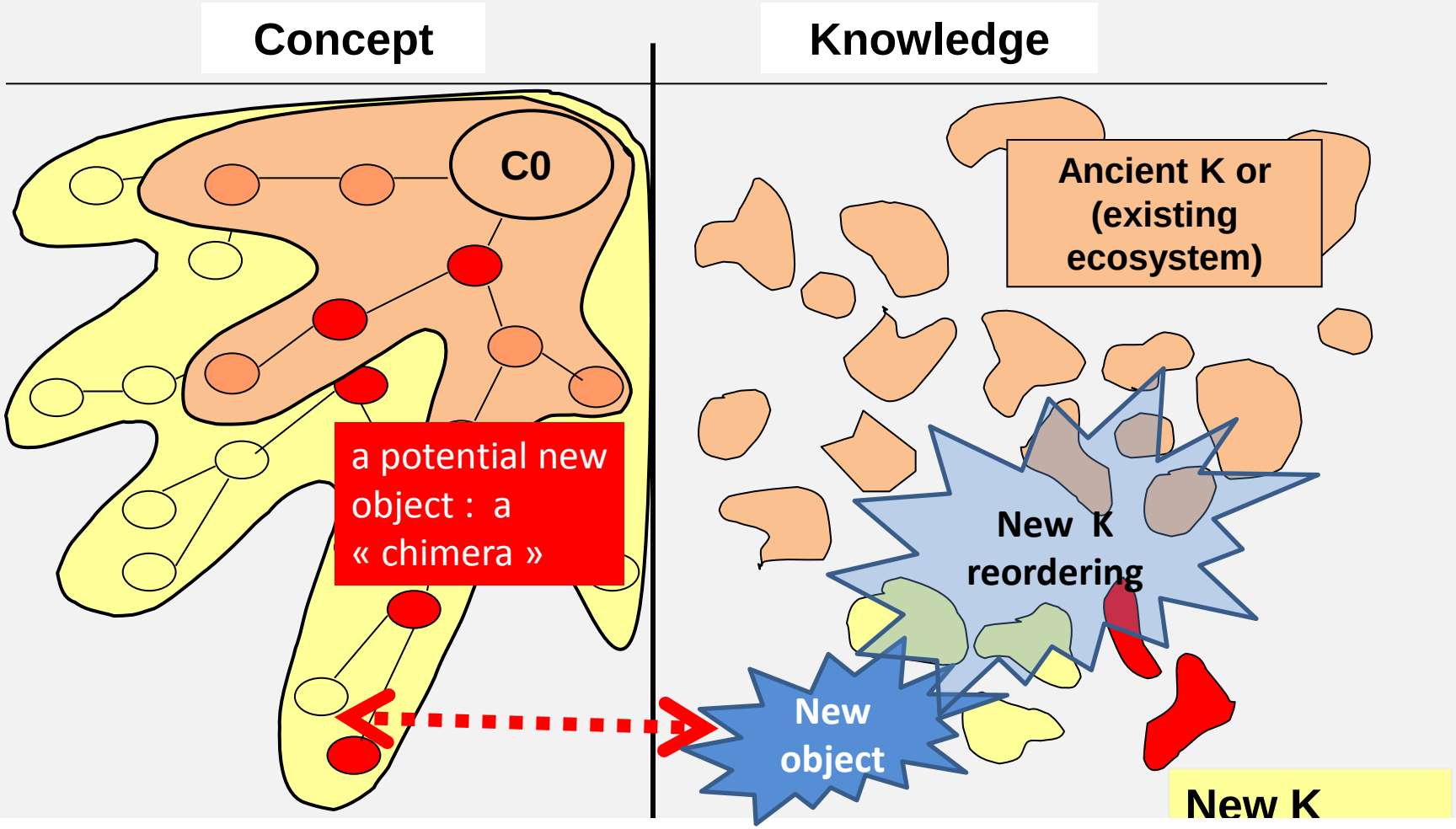
- **Permet d'échapper à la combinatoire du connu**
- **Mais on doit réorganiser la base K pour que cette expansion ne détruise pas la cohérence des objets.**

La théorie C-K comme modèle général du raisonnement de conception

Introducing C-K theory : the dual expansions

The departure point : a desirable unknown called a « concept » C0

« A system for distant diagnosis », « a post-modernist chair », « a solar plane »



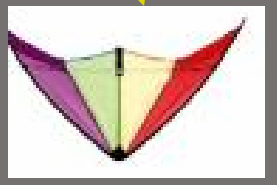
Central finding : C0 will be true only if there are expansions in both C and K : in C a new definition (chimera), in K a proposition that cannot be deduced from K0

C-K expansion Hatchuel (1996), Hatchuel and weil (2001,2003)

Concepts (C)

C0 = A flying boat that is not a seaplane

Expansive partition

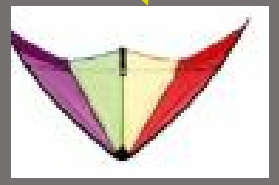


- **Design means expanding concepts with new attributes until satisfactory definitions emerge.**
- **In C the process is diverging and/or deepening**

The double expansion

A flying boat that

is not a seaplane



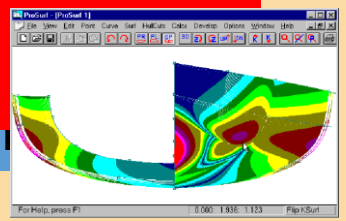
Knowledge (K)

- « true » propositions about things (or people)

Propositions are used to:

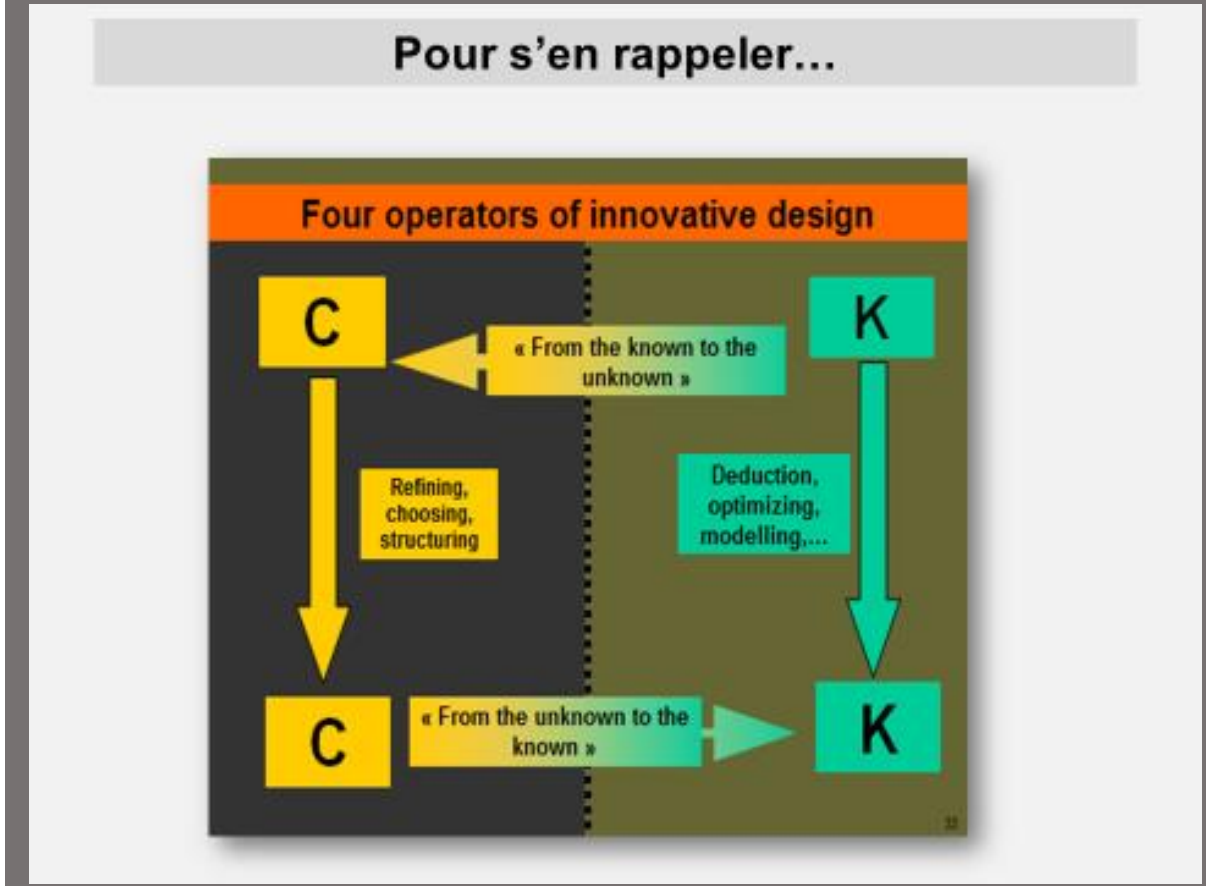
- to formulate and expand concepts :
- to test concepts
- K-dependancy or K-illusions

Testing concepts generates new knowledge



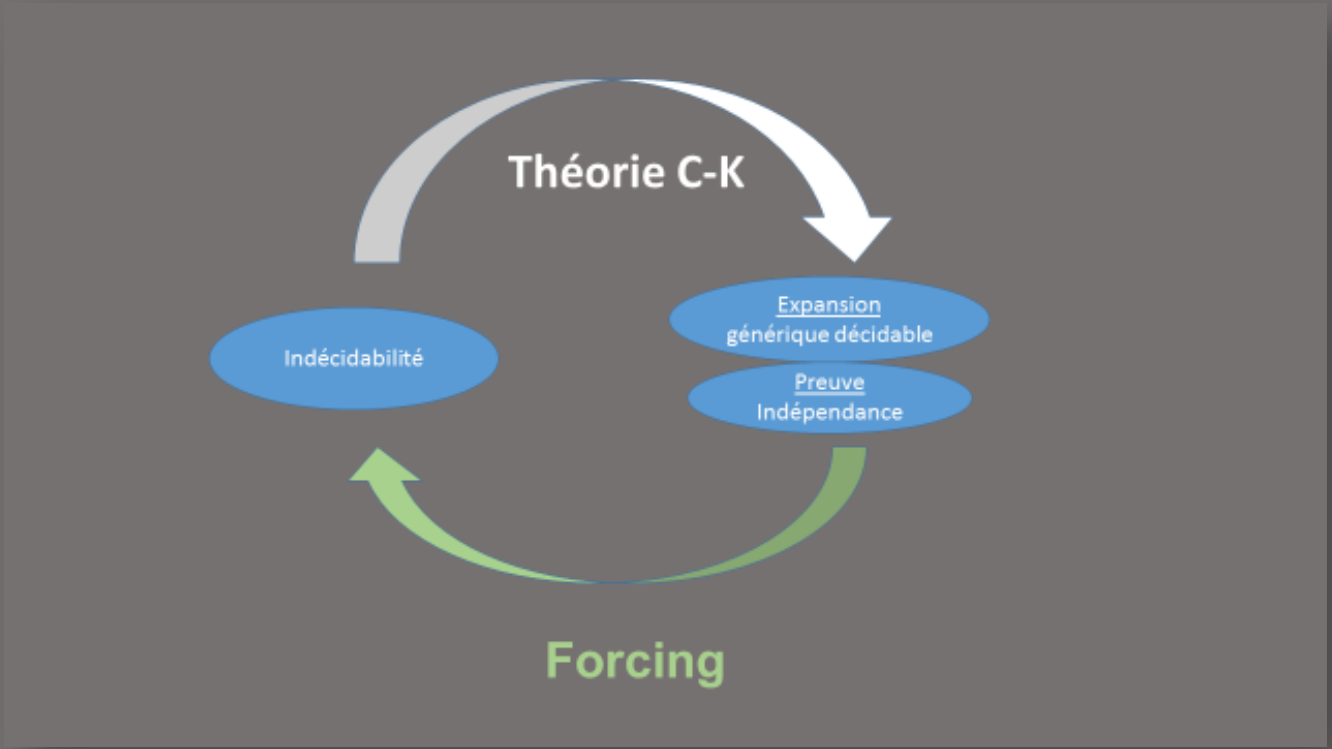
C-K theory describes an expansion **process through four operators i**nteracting :

1. **C-expansions that create** concepts by the revision of attributes in the definition of known objects
2. **K-expansions that create new (discovered)** objects and new attributes
3. **Conjunction creates new objects :** new names, new definitions
4. **K-K = K-reordering reorganizing knowledge through new created objects (no unique way)**



Remark : indépendance and indecidability

- a proof of **independance confirms that the initial proposition was u**ndecidable
- but proving **undécidability is not a proof of independance : the latter needs designing things with the two alternatives**



Implications

a) Implications 1 : Raisonnement-paradigme de la conception

- **Modèle général pour la description des phénomènes génératifs ou raisonnement créatif, rationalité dans l'inconnu (et pas incertain) :** étend probabilité, unifie invention et découverte…

- **Epistémologie conceptive (ou générique) : Le développement des connaissances est interprétable comme la conception d'un corpus sous contraintes :** contraintes en hérédité en C ; contraintes en K (mesures, preuves..) : donc **Forcings toujours possibles**. En mathématiques, Forcing a montré que plusieurs fondements étaient possibles

- **Logique conceptive :** Gödel montre les limites de toute axiomatique, mais Cohen montre la puissance d'expansion des axiomatiques : vive l'indécidabilité !! Elle signale des « trous » à remplir…

b) **Implications 2 : organisations adaptées à la conception innovante:**

- Critique de la R&D ; Méthode KCP, et d’autres…
- Expériences de stimulation expansives et formes d’autorité
- Formations en théorie C-K comme aide à l’apprentissage de l’inconnu
- Nouvelle économie de la conception (=/= production) et de l’inconnu

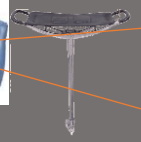
Example : Cheaper and lighter camping chair (foldable, comfortable)

With self-supporting structure

Without self-supporting structure

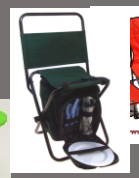
With a foldable, mechanical (tie & truss) structure

New principles for the structure



DPs enabling new functions (table, walking stick, shade, bag…)

Fit DPs (seat, legs, back) to known functions



Functional improvement

Sitting body

Inflatable structures (infused design)

Camping: activities, rucksack, users

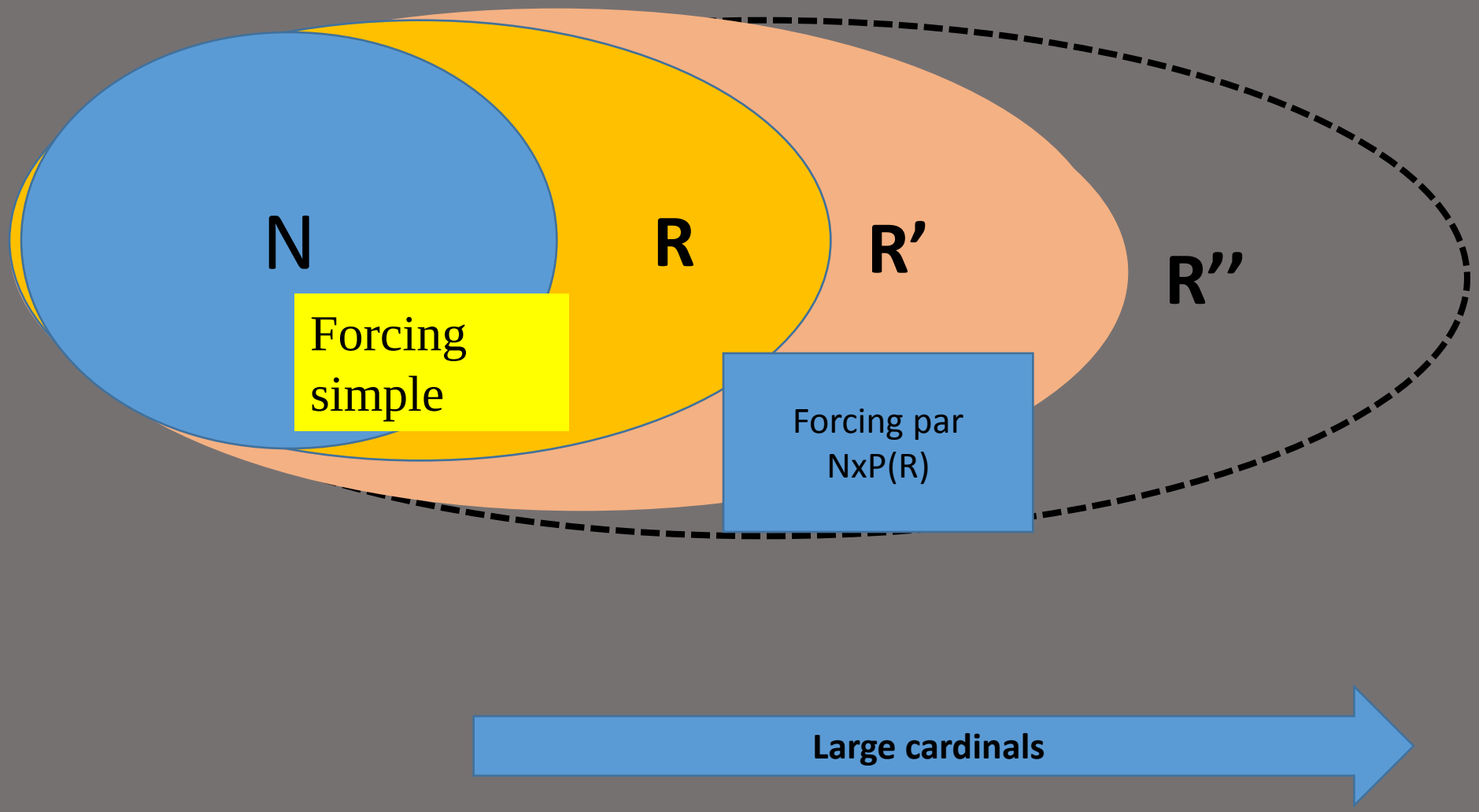
Functions: table, shade, bag, dual chair…

Armchairs

Known camping chairs

Known chairs

Foldable, light, comfortable


N
R
R'
R''
Forcing simple
Forcing par NxP(R)
Large cardinals

Basics du Forcing :

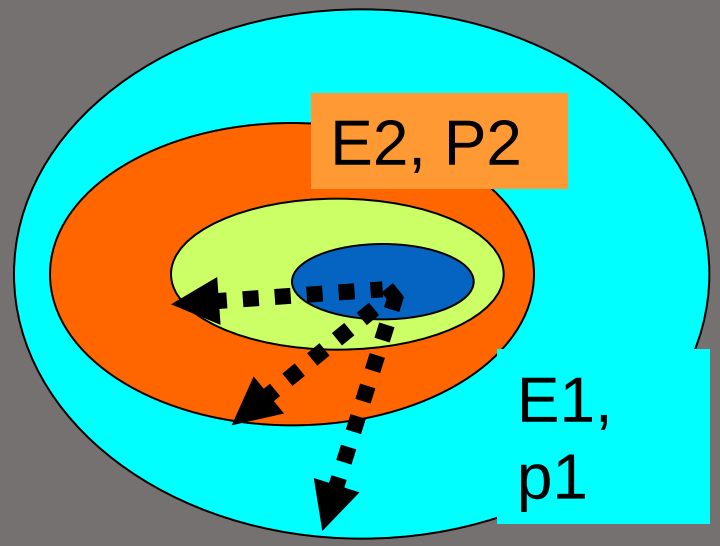
- **Filtre sur M** : ensemble ou suite d'ensembles **E1,.., En** emboités correspondant à une suite de **propriétés compatibles** de plus en plus « fortes » :

p1, p2, pk telles que **pn+1>pn** : donc :

- *En+1 inclus dans En*
- *pn+1 → pn mais pas l'inverse*

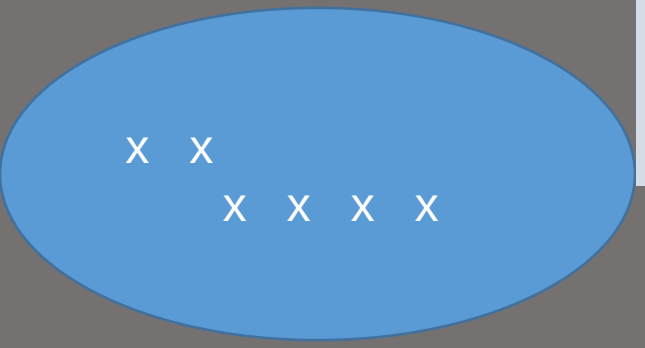
- **parties denses D** : pour tout pi, D contient pj>pi

- **Filtre générique** : filtre qui intersecte toutes les parties denses. Filtre qui contient les contraintes maximales

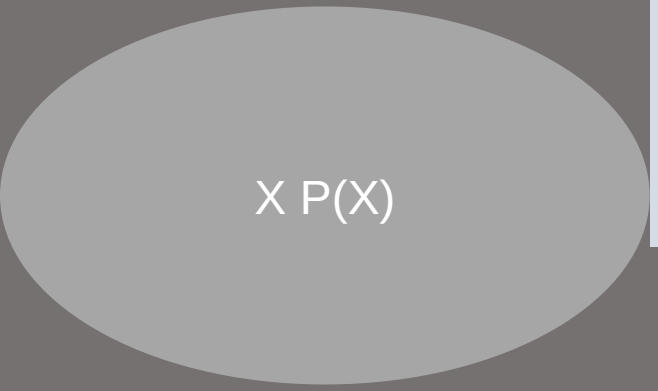


Parties denses

La « splitting condition » : une interprétation des conditions du nouveau



SETS : Sets are collections of known and distinguishable elements :
Extensional definition of a set : the set of eggs existing in a bird nest



CONCEPTS : a collection of X : P(X), unknowns, non designed/ K :
Intensional definition of a set : the set of eggs that will be conceived in the set by the desire of their paren

- The expansion exists by the progressive **construction (definition) of the properties of the future object**
- It is tried to reach an extensional definition of C0
- Finally, there is a choice function that emerges from the constructible attempts when they reach a « conjunction » (design that is recognized as ended).

EXAMPLE :
C0 = a tyre that is not made with rubber
C0 is indecidable today : no such tyres exist (for trains, not cars), (all tyres are in rubber), no way to prove that they cannot exist.

If C* is a design of C0 in some Kn state

C* is a tyre without rubber : now we can say that : tyres are independant of rubber

K-K : we have to reorganize definitions :
What is a tyre ? It is an object with some properties that can be in rubber or not

We have independance but no modularity.

Now let's design a tyre that speaks to the car : we can find
A system that has two states (on - off) we have a modularity.

Table 1 Ontology of design as a common core of design theories

Ontology of design	Forcing	C–K theory
Invariant ontologies	Axioms of Set theory	Basic logic and language; invariant objects (frontier)
Designed ontologies	New models of Sets	New families of objects
Knowledge expansions	Inductive rules (axiom of infinity)	Discovery or guided exploration
"Voids", undecidability and independence	Independent axioms Set theory	Concepts and independent structures in K
Generic expansions (generating new thing)	Generic filter	Design path with expanding partitions and K expansions
K-reordering, naming and preservation of meaning	Building rules for the extension model	New names and reorganizing the definition of designed ontologies

Comparaison des fonctions de modélisation, décision, conception (Hatchuel et al 2013)

Generative function	Modeling: G_m	Decision: G_o	Design: G_d
Status of the unknown	**X_x is unknown, yet observable and independent, Y forms an anomaly**	X_x presents free parameters to be decided, optimum is unknown	**X_x is unknown, assigned properties desirable, not observable,**
Input	$(K(X_i), \boldsymbol{Y})$ $\boldsymbol{Y}$ not explained by X_i s	$(K(X_x), D(d_i), O(D^*(d_i)))$	$(K(X_i), P(X_x))$ $P(X_x)$ undecidable / $K(X_i)$
Output	$K'(X_j)$, $K(X_x)$ (discovery)	$D_*(d_i)$	$K'(X_j)$, $K(X_x)$
Conditions	- consistency $\Delta \boldsymbol{H} > 0$ - completeness $\Delta \boldsymbol{D} > 0$	$O(D_*(d_j))$ holds.	$\Delta \boldsymbol{H} \geq 0$ $\Delta \boldsymbol{D} \geq 0$ **Determination**: (X_x exists) and ($P(X_x)$ holds)

Resultat : Gd contient Gm et Go