

Quantum foundations in the 21st century

Alexei Grinbaum

CEA-Saclay/LARSIM

Issues left open in the 20th century

Brillouin, 1953 Information should be defined with the exclusion of all human element.

Everett, 1957 Observers possess memory, i.e. “parts... whose states are in correspondence with past experience of the observers”.

Peres, 1986 “The two electrons in the ground state of the helium atom are correlated, but no one would say that each electron ‘measures’ its partner.”

Rovelli, 1996 “Any system can play the role of observed system and the role of observing system. . . . The fact that observer O has information about system S (has measured S) is expressed by the existence of a correlation. . . .”

von Neumann, 1935 “I would like to make a confession which may seem immoral. I do not believe absolutely in Hilbert space any more.”

Bohr, 1958 “The use of mathematical symbols secures the unambiguity of definition required for objective description.”

Interpretation of quantum theory



Reconstruction of quantum theory

AG, Reconstruction of quantum theory, *British Journal for the Philosophy of Science*, 58, 2007, pp. 387-408.

Composition of systems : Principles for deriving the Tsirelson bound

Linden et al., 2007 Non-local computation.

Pawłowski et al., 2009 Information causality for non-locality.

Masanes and Müller, 2011 Macroscopic locality for non-locality.

Cabello, 2013 Exclusivity for contextuality.

Continuity makes things quantum

Holland, 1995 Superposition principle for pure states. Ample unitary group.

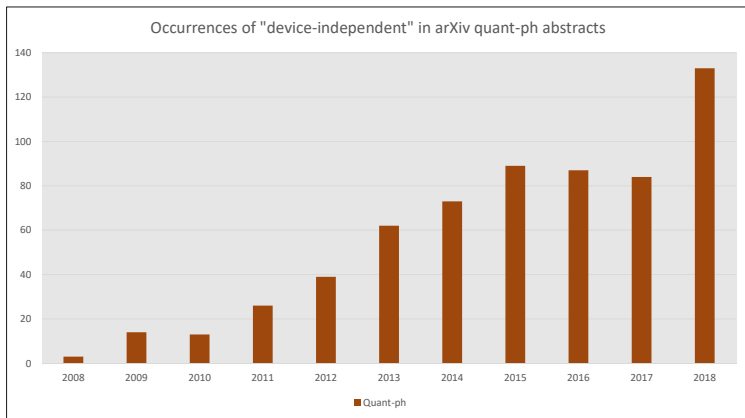
Landsman, 1998 Two-sphere property : a certain algebraic structure is isomorphic to a sphere.

Hardy, 2000 There exists a continuous reversible transformation on a system between any two pure states of that system.

Brukner and Zeilinger, 2003 Homogeneity of parameter space.

Dakić and Brukner, 2011 Between any two pure states there exists a continuous reversible transformation.

Device-independent approaches



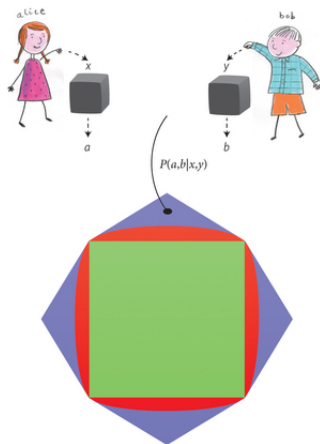
Origin : problem of trust in quantum cryptography.

Formal language

- Strings a, b, c, \dots in a finite alphabet.
- Inputs : free.
- Outputs : not free.

“For Alice (respectively for Bob), an experiment is a process or black box to which she feeds an input x from the alphabet \mathcal{X} and from which she receives an output a from the alphabet \mathcal{A} . Alphabets $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ are of finite cardinality.” Lang, Vértesi and Navascués, *J. Phys. A* 47 (2014) 424029.

Non-local boxes



S. Popescu and D. Rohrlich, *Found. Phys.* 24, 379 (1994)

S. Popescu, *Nature Phys.* 10, 264 (2014)

	Classical	Quantum	PR Boxes
CHSH max value	2	$2\sqrt{2}$	4

PR box takes two inputs $x, y \in \{0, 1\}$ and produces two outputs $a, b \in \{0, 1\}$ according to the joint distribution

$$P(ab|xy) = \begin{cases} 1/2 & : a + b = xy \pmod{2} \\ 0 & : \text{otherwise.} \end{cases}$$

Correlators : $E_{xy} = P(a = b|xy) - P(a \neq b|xy)$

CHSH : $CHSH = |E_{00} + E_{10} + E_{01} - E_{11}|$

No signalling : $P(a|x, y) = P(a|x)$ and $P(b|x, y) = P(b|y)$

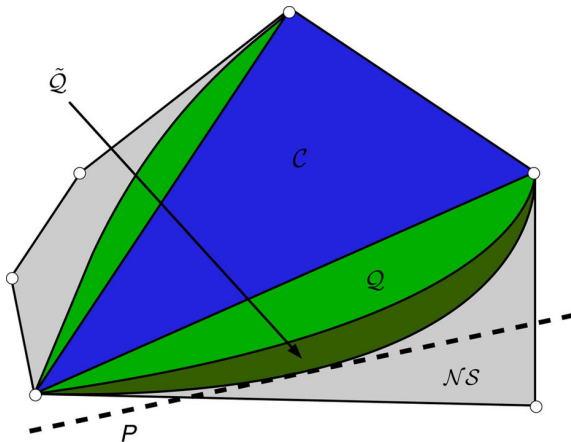
S. Popescu and D. Rohrlich, *Found. Phys.* 24, 379 (1994)

Physical but unknown

A box captures **unknown processes** connecting inputs and outputs. They are assumed to be physical but not described by any known physical theory.

A theory of **formal languages**. AG, *Found. Phys.* 45 (2015) 1341; AG, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* 58 (2017) 22-30.

“Observers are the nexus between experience and the account thereof. Whether this account can be formalized – that is, exhaustively represented in a **formal language** – can be doubted.” Hansen and Wolf, arXiv :1810.04573.



A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizes the set \tilde{Q} of “almost quantum” correlations.

Navascués, Pironio and Acin, *New J. of Phys.* 10, 073013 (2008)

Almost quantum correlations

Let $P(a_1, \dots, a_n | x_1, \dots, x_n)$ be an n -partite non-signalling distribution.

$P(a_1, \dots, a_n | x_1, \dots, x_n)$ is **almost quantum** if there exist a Hilbert space \mathcal{H} , a normalized state $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ and projector operators $\{E_k^{a,x}\} \subset B(\mathcal{H})$ with the properties :

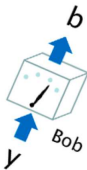
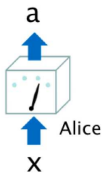
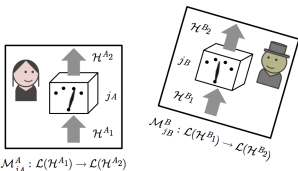
- i $\sum_a E_k^{a,x} = \mathbf{1}$, for all x, k .
- ii $E_1^{a_1, x_1} \dots E_n^{a_n, x_n} |\phi\rangle = E_{\pi(1)}^{a_{\pi(1)}, x_{\pi(1)}} \dots E_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}, x_{\pi(n)}} |\phi\rangle$, where $\pi \in S_n$ is an arbitrary permutation of the parties $\{1, \dots, n\}$.
- iii $P(a_1, \dots, a_n | x_1, \dots, x_n) = \langle \phi | \prod_{k=1}^n E_k^{a_k, x_k} | \phi \rangle$.

$P(a_1, \dots, a_n | x_1, \dots, x_n)$ is **quantum** if there exist Hilbert spaces $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^n$, a normalized state $|\phi\rangle \in \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_k$ and projector operators $\{E_k^{a,x}\} \subset B(\mathcal{H}_k)$ with the properties :

- i $\sum_a E_k^{a,x} = \mathbf{1}_k$, for all x, k .
- ii $P(a_1, \dots, a_n | x_1, \dots, x_n) = \langle \phi | \bigotimes_{k=1}^n E_k^{a_k, x_k} | \phi \rangle$.

Experimental avenues

- Semi-device independent approaches.
- Quantum reference frames. Connections with gravity.
- Quantum thermodynamics.



Indefinite causal orders

Probabilities are bilinear functions of the CP maps :

$$P(\mathcal{M}^A, \mathcal{M}^B) = \omega(\mathcal{M}^A, \mathcal{M}^B)$$

$\omega : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2}) \mapsto \mathbb{R}$
a state.

Alice and Bob are given some **classical inputs** labeled by x and y , and return some **classical outputs** a and b , respectively.

Causal game : optimize $P = \frac{1}{2} (p(a \oplus y = 0 | b' = 0) + p(b \oplus x = 0 | b' = 1))$.
Classical $P_C = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Quantum $P_Q = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Oreshkov, Costa, and Brukner, Nature Comm. 3, 1092 (2012), using previous work by Hardy and Chiribella

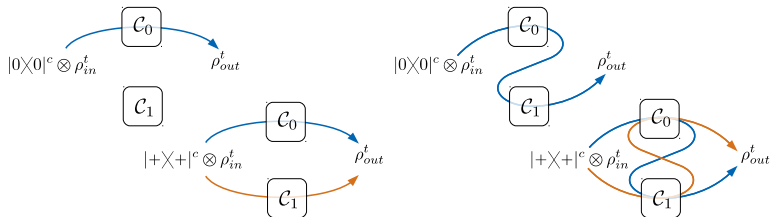
Causal realism

Causal realism : $P(x, y|a, b)$ result from a convex mixture of causal orders.
Causal order is predefined, even if unknown with certainty :

$$P(x, y|a, b) = p(A \preceq B)p(b'|A \preceq B) \sum_{b'} p(x|a, b', A \preceq B)p(y|a, b, b', A \preceq B) + p(A \not\preceq B)p(b'|A \not\preceq B) \sum_{b'} p(y|b, b', A \not\preceq B)p(x|a, b, b', A \not\preceq B).$$

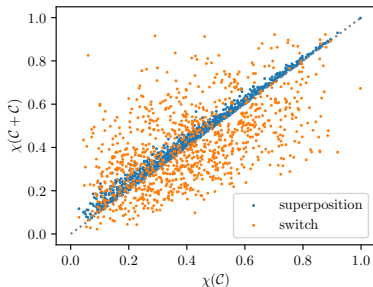
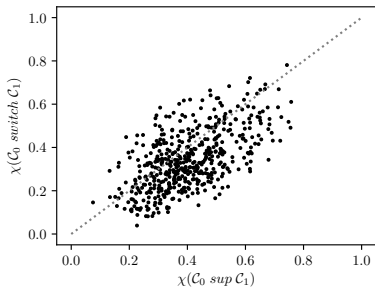
- Causal inequality plays a role similar to Bell inequalities invalidating local realism. Quantum bound is an analog of the Tsirelson bound.
- Entanglement provides a regulative principle *in lieu* of spatiotemporal causality.
- **Entropic measures** play an important role.

Quantum switch



N. Loizeau and AG, work in progress

Quantum switch vs. quantum superposition

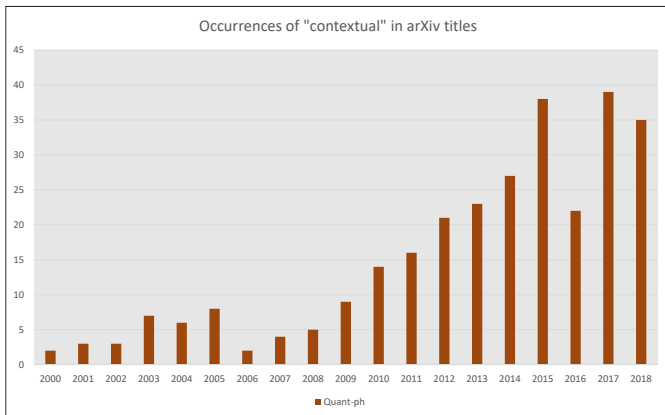


N. Loizeau and AG, work in progress

Where does quantum strangeness come from ?

Non-classical feature	Example of author
Uncertainty	W. Heisenberg
Complementarity	N. Bohr
Quantum superposition	E. Schrödinger
Entanglement and non-locality	J. Bell
Quantum contextuality	E. Specker and S. Kochen
Tensor product structure	B. Coecke and A. Kissinger
Amount of non-locality	J. Bub
Cloning and teleportation	A. Zeilinger
Quantum discord	V. Vedral
Quantum randomness	N. Gisin
Cryptographic protocols	V. Scarani
Time and postselection paradoxes	Y. Aharonov and D. Rohrlich
Weak measurements	L. Vaidman and A. Elitzur
Indefinite causal order	C. Brukner
Generalized contextuality	A. Acin, R. Spekkens, A. Cabello

The Rise of Contextuality



Non-contextualité des probabilités Les probabilités ne dépendent pas du contexte de la mesure, en vertu du théorème de Gleason.

Contextualité des valeurs Les valeurs d'une observable dépendent du contexte de la mesure, en vertu du théorème de Kochen-Specker.

Théorème de Kochen-Specker

Déterminisme des valeurs La valeur d'une observable est bien définie indépendamment de sa mesure (mais elle peut rester inconnue).

Non-contextualité des mesures La valeur assignée à un projecteur ne dépend pas de la base dans laquelle celui-ci est considéré (du *contexte* de la mesure).

Déterminisme des valeurs }
Non-contextualité des mesures } Contradiction logique.

S. Kochen and E.P. Specker, The problem of hidden variables in quantum mechanics, *Journal of Mathematics and Mechanics* 17, 59–87 (1967).

La parabole de Specker

À l'école assyrienne des prophètes enseignait un voyant. Sa fille ayant à peine atteint l'âge de se marier, il croulait sous les requêtes des jeunes élèves pour l'épouser. Et bien qu'il fût conscient qu'il ne pourrait pas rester indéfiniment à ses côtés, il hésitait encore de la laisser partir. Afin que les prétendants puissent se convaincre de leur indignité, il leur promit qu'elle serait mariée à celui qui résoudreait une énigme.

E. P. Specker. Die Logik nicht gleichzeitig entscheidbarer Aussagen. *Dialectica* 14, 239–246 (1960).

La parabole de Specker

Chaque prétendant fut amené devant une table sur laquelle étaient disposées trois boîtes. On demanda alors aux prétendants de prédire quelles boîtes contenaient une gemme, et quelles boîtes étaient vides.

Mais peu importe le nombre de leurs tentatives, il semblait impossible de mener à bien cette tâche.

Après que chaque prétendant ait donné sa prédiction, il était invité à ouvrir la paire de boîtes qu'il avait désignées comme étant toutes les deux vides (dans le cas où le prétendant avait prédit qu'il n'y avait qu'une seule gemme) ou la paire de boîtes qu'il avait désigné comme étant toutes les deux pleines (dans le cas où le prétendant avait prédit qu'il y avait deux gemmes). Dans chaque cas, il se trouva qu'une boîte contenait une gemme et que l'autre n'en contenait pas.

La parabole de Specker

La fille serait restée célibataire jusqu'à la mort de son père si, après la prédiction d'un prétendant qu'elle aimait, elle n'ouvrait rapidement deux boîtes elle-même, une qu'il avait indiquée comme étant vide et l'autre qu'il avait prédite pleine. La prédiction, pour ces deux boîtes, se trouva être correcte ! Après la faible protestation de son père qui aurait voulu qu'un autre couple de boîtes fût ouvert, elle essaya de regarder ce que contenait la troisième boîte, ce qui s'avéra impossible.

La fille et le prétendant se marièrent et menèrent une vie de bonheur.

Interprétations de la contextualité quantique

- La non-transitivité de l'implication logique (Kochen, Hardy).
 $1_1 \Rightarrow 0_2$, $0_2 \Rightarrow 1_3$ and $1_1 \Rightarrow 0_3$ entrent en contradiction.
- La mesurabilité simultanée par paire, sans la mesurabilité globale (Cabello).
- Une famille de données peut être localement cohérente mais globalement incohérente (Abramsky).
- Unperformed experiments have no results (Peres).
- Les « faits » contrefactuels ou futurs ne sont pas compatibles avec la mécanique quantique (Specker).
- Dieu n'est pas omniscient dans tous les mondes possibles.

Mermin-Peres magic square

Pour deux qubits, $\dim H = 4$.

$A = \sigma_z \otimes \hat{I}$	$B = \hat{I} \otimes \sigma_z$	$C = \sigma_z \otimes \sigma_z$
$a = \hat{I} \otimes \sigma_x$	$b = \sigma_x \otimes \hat{I}$	$c = \sigma_x \otimes \sigma_x$
$\alpha = \sigma_z \otimes \sigma_x$	$\beta = \sigma_x \otimes \sigma_z$	$\gamma = \sigma_y \otimes \sigma_y$

$$ABC = abc = \alpha\beta\gamma = \hat{I}$$

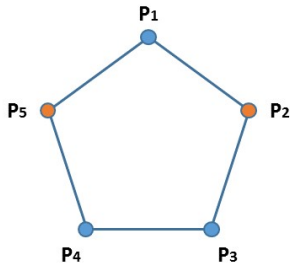
$$Aa\alpha = Bb\beta = \hat{I}, Cc\gamma = -\hat{I}$$

Caractéristique	Non-localité	Contextualité
Valable pour un système multipartite	Oui	Oui
Valable pour un système unique	Non	Oui
Indépendant de l'état du système	Non	Oui
Dimension minimale de l'espace de Hilbert	2	3
Indépendant du modèle	Oui	Non ?

AG à partir de H. Dourdent, arXiv:1801.09768

Inégalité de Klyachko

Dans l'espace de Hilbert de dimension 3, on choisit parmi 5 observables binaires.



Borne classique : 2. Borne quantique : $\sqrt{5}$.

A. Klyachko, arXiv:quant-ph/0206012

A. Klyachko et al., *Phys. Rev. Lett.* 101, 020403 (2008)

'Alice' and 'Bob' need not be postulated. The presence of several observers could possibly be derived.

"The operation of forming a composite system from its subsystems should not be a fundamental structure in a physical theory. [...] The correct question would be 'When does a physical system **behave** like it were composed of smaller parts?'" Fritz, *Rev. Mod. Phys.* 24 (2012) 1250012.

"The manner in which a physical system is partitioned into subsystems is a **subjective choice** of the observer, and should not affect the predictions of the theory." Masanes, Galley, and Müller, arXiv :1811.11060.

"The partition of a physical system into subsystems plays a crucial role for the **increase in computational power.**" Frembs, Roberts, and Bartlett, *New J. Phys.* 20 (2018) 103011.

Old and new modes of thinking about systems

Einstein's letter to Schrödinger, 19 June 1935 :

The wavefunction ψ [should describe] the real state of the real system.

Dirac, 1931 :

The most powerful advance would be to perfect and generalize the mathematical formalism [...] and to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities.

Renninger, 1960 ; Elitzur and Vaidman, 1993 ; **Devoret, 2019** :

Quantum measurement is not about the physical perturbation induced by the probe but about what you know (and what you leave unknown) as a result. "Absence of an event can bring as much information as its presence."

Claude Shannon No semantics.

John Wheeler The propositions are not propositions about anything. They are the abstract building blocks, or “pregeometry,” out of which “reality” is conceived as being built.